Abrégé d'Analyse combinatoire

Jean Vaillant, septembre 2012

L'analyse combinatoire (ou dénombrement) consiste à déterminer le cardinal d'un ensemble donné, autrement dit à compter les éléments appartenant à cet ensemble. Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, elle nous permet de déterminer la probabilité d'un événement A grâce à la formule :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre total de cas possibles}}.$$

1 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

L'ensemble des sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble de référence E fini est noté $\mathcal{P}(E)$ et vérifie :

$$\text{Si } \; Card(E) = n, \quad \text{alors} \quad Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Bien-sûr, l'ensemble vide $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$ donc le nombre de parties non vides de E est $2^n - 1$.

2 Permutations sans répétition

Le nombre de permutations de n éléments, c'est-à-dire de façons d'ordonner ces n éléments, est égal à $n!$ (lire factorielle n).

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \text{ .Par convention,} \quad 0! = 1.$$

3 p-arrangements

Un p-arrangement d'un ensemble à n éléments est une suite ordonnée de p éléments sans répétition. Le nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$) s'écrit A_n^p (lire $a\,n\,p$) et vaut:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

4 Combinaisons sans répétition

Une combinaison de p éléments pris parmi n est un sous-ensemble de p éléments pris dans un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments dans un ensemble à n éléments s'écrit C_n^p (lire $c\,n\,p$) et **aussi** $\binom{n}{p}$ et vaut :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)}{k \times (p-1) \times ... \times 2 \times 1}.$$

Remarque : La dernière expression peut permettre un calcul rapide de C_n^p. Elle comporte p termes au numérateur et p termes au dénominateur.
Pour tout entier naturel non nul n, on a : $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^{n-1} = n,\ C_n^n = 1$.
Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) avec $p \leq n$, on a :

$$C_n^p = C_n^{n-p},\ C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

5 p-listes

Une p-liste d'un ensemble à n éléments est une suite ordonnée de p de ces n éléments, certains éventuellement répétés. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n est : n^p.
Remarque : C'est le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

6 Permutations avec indiscernabilité intra catégorie

Une permutation peut ordonner n éléments appartenant à k catégories exclusives sans distinguer ceux qui appartiennent à la même catégorie. Soient $n_1, n_2, ..., n_k$ les cardinaux des k catégories $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$. Le nombre de telles permutations de n éléments répartis par catégories d'éléments indiscernables est :

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...\,n_k!}.$$

7 Combinaisons avec répétitions

Une combinaison avec répétitions de k éléments choisis parmi n, est une liste non ordonnée, avec répétitions éventuelles des éléments. Le nombre de combinaisons avec répétition est :

$$C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1) \times (n+k-2) \times ... \times n}{k \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1}.$$

Remarque : Ici, on peut avoir $k > n$.

8 Situations usuelles

Les tableaux ci-dessous précisent quelques situations classiques en analyse combinatoire.

1) Tirages de k éléments parmi n

TIRAGES	ordonnés	non ordonnés
sans remise	A_n^k	C_n^k
avec remise	n^k	C_{n+k-1}^{n-1}

2) Rangements de k objets dans n cases

OBJETS	discernables	indiscernables
au plus un objet dans une case	A_n^k	C_n^k
éventuellement plusieurs objets dans une case	n^k	C_{n+k-1}^{n-1}

3) Rangements de n objets dans n cases

OBJETS	discernables	indiscernables
au plus un objet dans une case	$n!$	1

4) Rangements de n objets en k catégories à l'intérieur desquelles ils sont indiscernables

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...\,n_k!}, \quad \text{avec} \quad n_1 + n_2 + ... + n_k = n, \quad n_i \text{ étant l'effectif de la catégorie i}}$$

9 Illustrations

I) Soit l'ensemble à 3 éléments $E = \{a, b, c\}$. On considère des suites à 2 éléments.

1) Nombre d'arrangements sans répétition : $A_3^2 = 6$

ab	ac	ba	bc	ca	cb

2) Nombre d'arrangements avec répétitions : $3^2 = 9$

aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc

3) Nombre de combinaisons sans répétition : $C_3^2 = 3$

{a,b}	{a,c}	{b,c}

4) Nombre de combinaisons avec répétitions : $C_{3+2-1}^{3-1} = C_4^2 = 6$

(a,a)	{a,b}	{a,c}	(b,b)	{b,c}	(c,c)

5) Nombre de permutations sans répétition : $3! = 6$

abc	acb	bac	bca	cab	cba

II) Soit un ensemble E à 2 catégories avec 3 éléments dans la catégorie a et 2 éléments dans la catégorie b. Au sein des catégories, on considère que les éléments sont indiscernables. On peut donc poser

$$E = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$$

avec a_1, a_2, a_3 les éléments de la catégorie a et b_1, b_2 ceux de la catégorie b. En l'absence de distinction entre individus de même catégorie, le nombre de permutations n'est plus $5! = 120$ mais bien $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

aaabb	aabab	aabba	abaab	ababa	abbaa	baaab	baaba	babaa	bbaaa